I

On considère le système différentiel :

$$(S)\ \begin{cases} x'' + 2y'' + 2x' + y' + 2y = 0 \\ x'' + y'' + x' + y' - 2x = 0 \end{cases}$$

où x et y sont deux fonctions à valeurs réelles, définies sur $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivables.

1° Exprimer x'' et y'' en fonction de x, y, x', y'.

En introduisant les fonctions inconnues $X = x'$ et $Y = y'$, mettre (S) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

où A est une matrice carrée d'ordre 4.

2° Diagonaliser A sur le corps des complexes (*on trouvera en particulier les valeurs propres i et $-i$*).

3° En déduire, pour tout réel t, les expressions de $x(t)$ et de $y(t)$, d'abord à l'aide de fonctions à valeurs complexes, ensuite à l'aide de fonctions à valeurs réelles.

4° Soit (x_0, y_0) la solution de (S) qui est telle que :

$$x_0(0) = y_0(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad x'_0(0) = y'_0(0) = 0.$$

Dans un plan affine rapporté à un repère Oxy, on désigne par (C) l'ensemble décrit par le point de coordonnées $(x_0(t), y_0(t))$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

Étudier et dessiner la forme de (C) au voisinage de son point $t = 0$.

(*On admettra l'existence de x_0 et de y_0. On ne cherchera pas les expressions de $x_0(t)$ et de $y_0(t)$. Les dérivées nécessaires seront déduites de* (S).)

II

On admet qu'il existe un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, contenant 1, et deux fonctions f et g, définies sur I, indéfiniment dérivables, telles que :

$$f(1) = g(1) = 1$$

et, pour tout t de I :

$$\begin{cases} [f(t)]^2 + [g(t)]^2 + t^2 = 3 & (1) \\ [f(t)]^3 - [g(t)]^3 + t^3 = 1 & (2) \end{cases}$$

1° Calculer $f'(1)$, $g'(1)$, $f''(1)$, $g''(1)$. [*On dérivera par rapport à t les deux membres de chacune des relations* (1) *et* (2).]

2° Dans un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, on considère la courbe (C) décrite par le point de coordonnées :

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = t$$

lorsque t décrit I.

Soit $s(t)$ l'abscisse curviligne du point de (C) de cote t, (C) étant orientée dans le sens des t croissants, et une origine étant choisie sur (C).

Trouver, *au point $t = 1$* :

a. l'équation du plan osculateur à (C).

b. les valeurs de $\dfrac{ds}{dt}$ et de $\dfrac{d^2s}{dt^2}$.

c. les composantes des vecteurs unitaires du trièdre de FRENET.

d. le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure de (C).

III

Soit n un entier strictement positif.

On considère la fonction f_n définie, pour x réel strictement supérieur à -1, par :

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{t}{(t^3+1)^n}\, dt.$$

1° Étudier les variations de f_n, et construire sa représentation graphique, C_n.

(*On montrera que $f_n(x)$ a une limite l_n pour x infini positif. Le calcul de l_n fait l'objet de la question 3°. L'étude de la concavité de C_n n'est pas demandée.*)

2° Démontrer que f_1 est développable en une série entière en x, dont on donnera les coefficients, le rayon de convergence, et la nature aux bornes de l'intervalle réel de convergence.

3° Pour n supérieur ou égal à 2, exprimer l_n en fonction de l_{n-1}.

En déduire l'expression de l_n en fonction de n.

4° Trouver la limite de l_n pour n infini (*on pourra introduire le logarithme népérien de l_n, et utiliser une série*).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail